Rappel : $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ différentiables

$x=(x_1,\dots,x_n)\longmapsto f(x)$ $\quad$ $y=(y_1,\dots,y_m)\longmapsto g(y)$

Alors, $g\circ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ est différentiable et $\forall 1\le i\le \ell$, $\forall 1\le j\le n$

$$\frac{\partial g_i\circ f}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

$$\boxed{\nabla f(x) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{array} \end{array}}$$

$$\underset{\ell\times n}{\nabla(g\circ f)(x)} = \underset{\ell\times m}{\nabla g(f(x))}\cdot \underset{m\times n}{\nabla f(x)}$$

⚠ convention $f=\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$,

$\gamma'(x)=(\gamma_1'(x),\dots,\gamma_m'(x))$, $\nabla\gamma(x)=\gamma'(x)^T = \begin{pmatrix}\gamma_1'(x)\\ \vdots \\ \gamma_m'(x)\end{pmatrix}$

Exemple 4.38 (i) (suite)

$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors,

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)}_{\text{dérivation, puis composition}} = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\cdot\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\sin\theta}{r}$$

composition, puis dérivation

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\cdot\frac{\cos(\theta)}{r}$$

En notation matricielle :

$g = f\circ\varphi$ $\qquad\qquad \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\nabla g(r,\theta) = \nabla f(\varphi(r,\theta))\cdot\nabla\varphi(r,\theta)$$

$$\nabla g(r,\theta) = \nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla g(r,\theta)}_{\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} = \nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

en développant le membre de gauche, on a le résultat

<u>Exemple 4.39</u> : (i) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$h(u,v) = \left(-u(1-2v), u^2(1-v), uv\right).$$

$g = g(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ & $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = g \circ h$

différentiable.

$\nabla f(1, 0)$

$\nabla f(u, v) = \nabla(g \circ h)(u, v) = \nabla g(h(u, v)) \cdot \nabla h(u, v)$

$$\nabla h(u, v) = \begin{pmatrix} 2v - 1 & 2u \\ 2u(1-v) & -u^2 \\ v & u \end{pmatrix}$$

$h(1, 0) = (-1, 1, 0)$, $\nabla h(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\nabla f(1,0) = \nabla g(-1,1,0)\, \nabla h(1,0)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0),\ \frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0),\ \frac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0) \right) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \Big(-\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0),$$

$$2\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - \frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0) \Big)$$

(ii) Soit $D :]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y = 0\}$

$G : D \to E$ définie par $G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

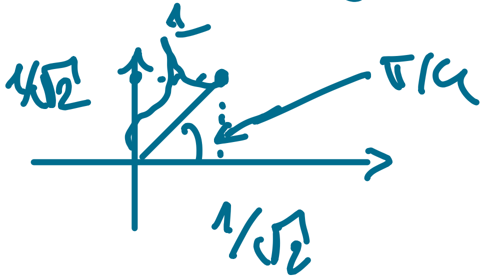
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable tq $\nabla(f \circ G)(r,\theta) = \left(2r\cos\theta\sin\theta,\ r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right)$

$\nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = ?$

$$\nabla(f \circ G) = \nabla f(G(r,\theta)) \cdot \nabla G(r,\theta)$$

$$= \nabla f(G(r,\theta)) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$G(r,\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = G\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$



$$\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

$$\left(\underset{1}{\cancel{\tfrac{5}{2}}}, 0\right) = \underbrace{\nabla f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\underset{1}{\cancel{\tfrac{5}{2}}}, 0\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)} \quad \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$$

Corollaire 4.40 (Thm fond. du calcul intégral généralisé)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f=(t,x)$, $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)\,dx$$

Alors,

$$g'(t) = \beta'(t) \cdot f(t,\beta(t)) - \alpha'(t)\, f(t,\alpha(t)) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

$$F(a,b,t) = \int_a^b f(t,x)\,dx \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial a} = -f(t,a) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial b} = f(t,b) \end{array}\right.$$

$$g(t) = F(\alpha(t), \beta(t), t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(a,b,t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx .$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}$$

Exemple 4.41

Soit $F :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_t^{t^2} \frac{1}{x} e^{xt}\,dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{xt}}{x}\right] = \frac{e^{xt}}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}$$

Calculons $F'(1)$, $f(t,x) = \frac{e^{xt}}{x}$, $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t^2$

$$\Rightarrow F'(t) = \beta'(t) f(t,\beta(t)) - \alpha'(t) f(t,\alpha(t)) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

$$= 2t\,\frac{1}{t^2}e^{t^2\cdot t} - 1\cdot\frac{1}{t}e^{t\cdot t} + \int_t^{t^2} e^{x\cdot t}\,dx$$

en $t=1$,

$$F'(1) = 2 \cdot e - e + \underbrace{\int_1^1 e^x dx}_{=0} = e$$

Chapitre 5 : Ensembles de niveau et thm des fonctions implicites.

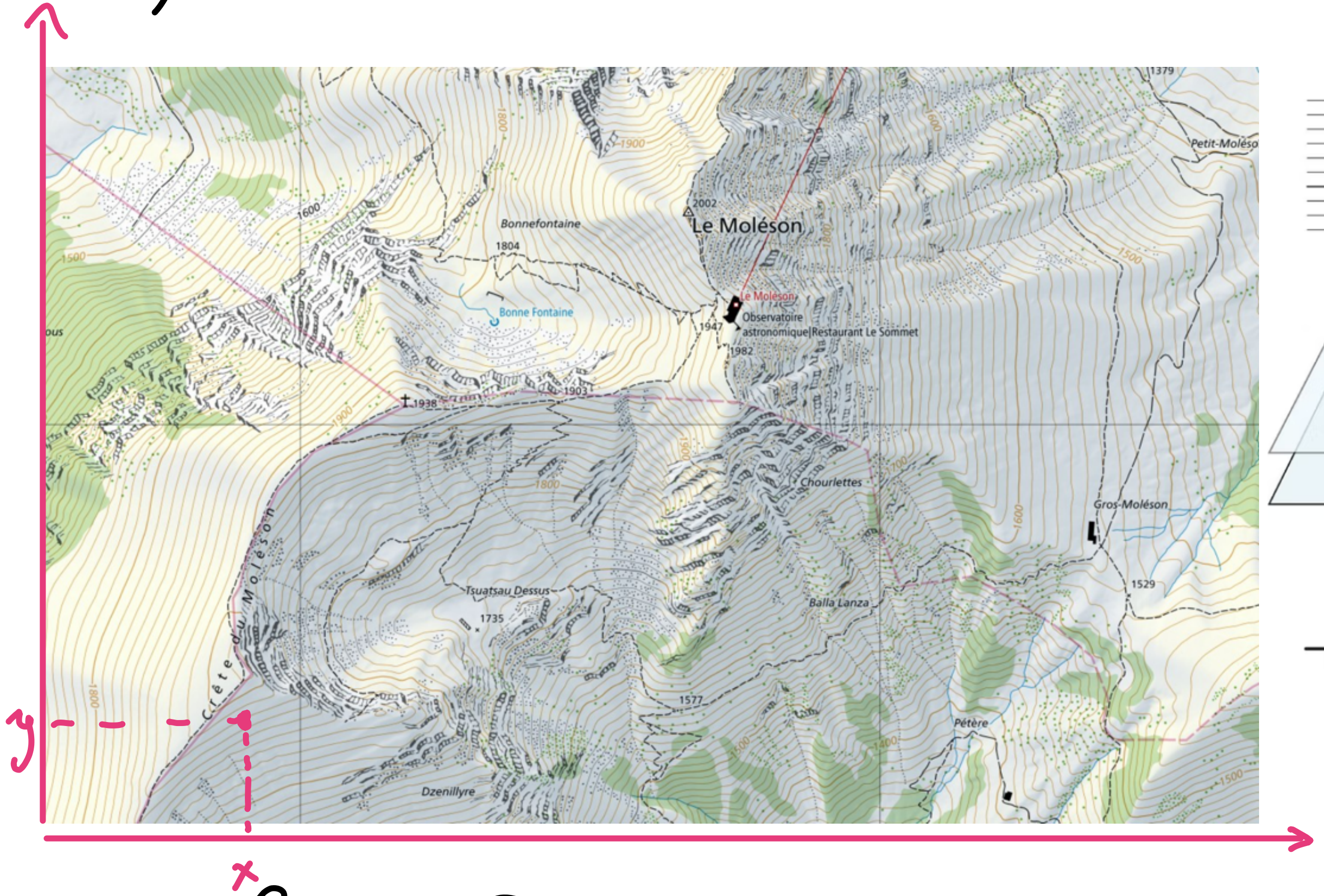
§5.1 Intro & les théorèmes.

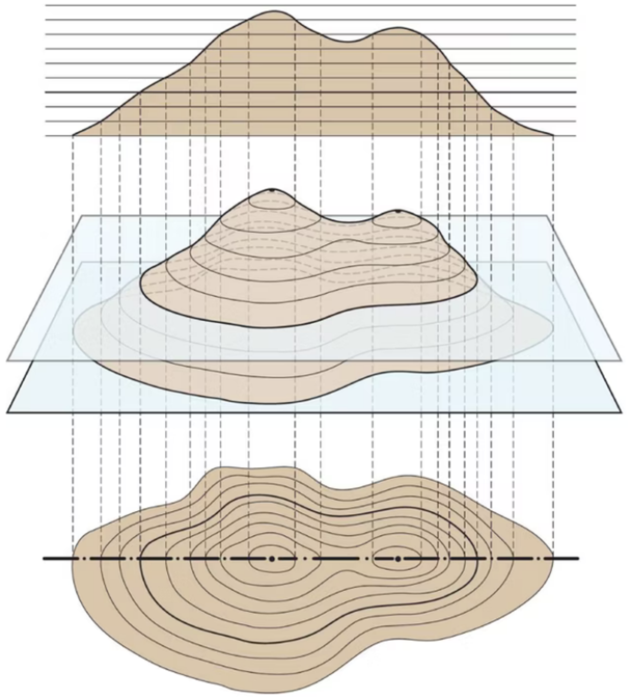
Définition 5.1 (Ensemble de niveau d'une fonction)
Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. L'ensemble de niveau c de f est la préimage de $\{c\}$ par f :

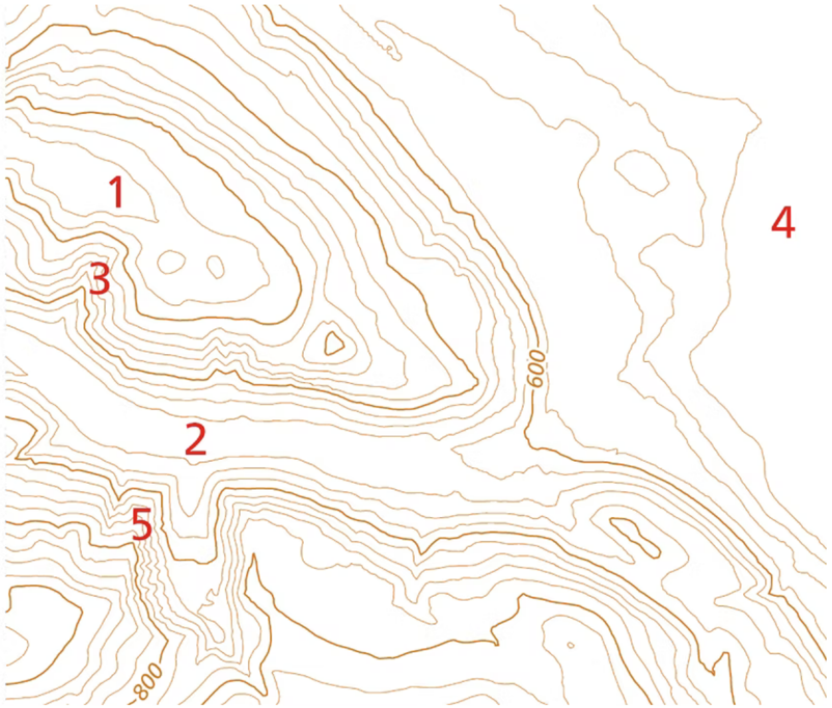
$$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in D : f(x) = c\}.$$

Exemples 5.2 (dans $\mathbb{R}^2$)

(i) Les courbes de niveau sur les cartes géographiques







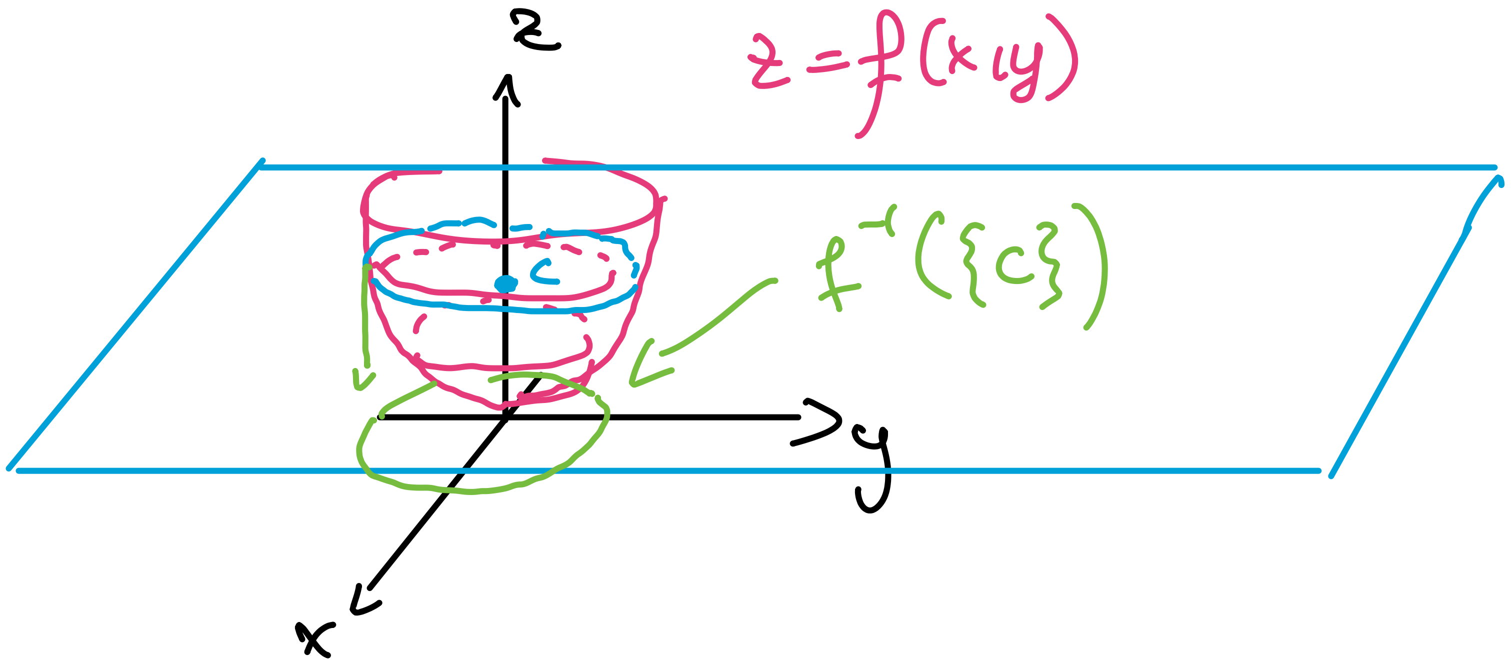
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) =$ altitude du point (x,y) sur la carte

(ii) Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+y^2$.

Si $c<0$, $f^{-1}(\{c\}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x^2+y^2=c\} = \emptyset$

Si $c=0$, $f^{-1}(\{c\}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x^2+y^2=c\} = \{(0,0)\}$

Si $c>0$, $f^{-1}(\{c\}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=c\} = \partial B\left((0,0),\sqrt{c}\right)$



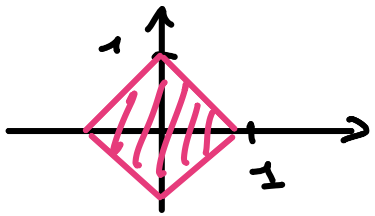
(ii) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|+|y| < 1 \\ |x|+|y|-1 & \text{si } |x|+|y| \geq 1 \end{cases}$$

Si $c < 0$,

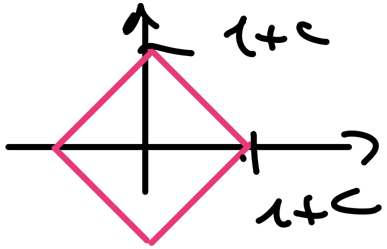
$$f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$$

Si $c = 0$, $f^{-1}(\{c\}) = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$



Si $c > 0$, $f^{-1}(\{c\}) = \{(x,y) : f(x,y) = c\}$

$$= \{(x,y) : |x|+|y| = 1+c\}$$

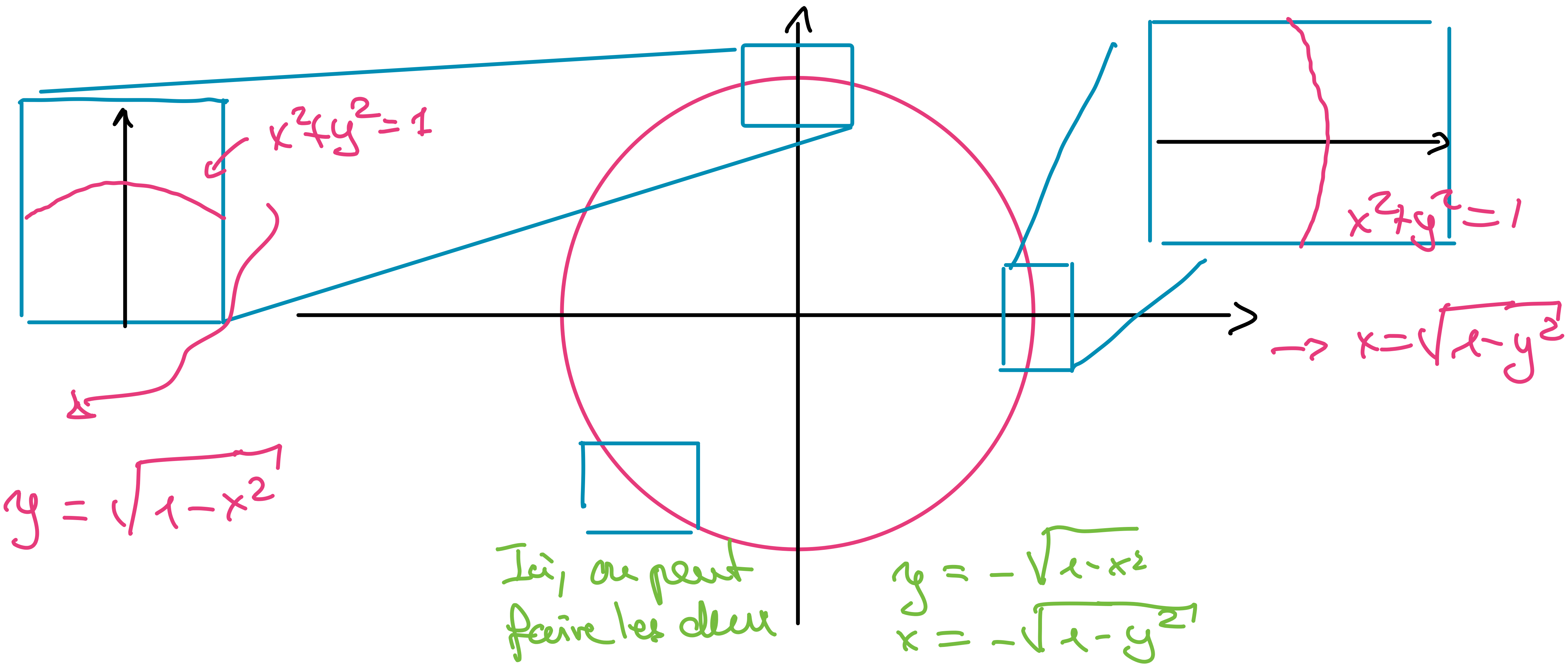


Remarque 5.3 :

On voit dans $\mathbb{R}^2$ qu'un ensemble de niveau peut avoir plusieurs formes : $\emptyset$, des points, une courbe ou un ensemble avec intérieur ou une combinaison de ces choses.

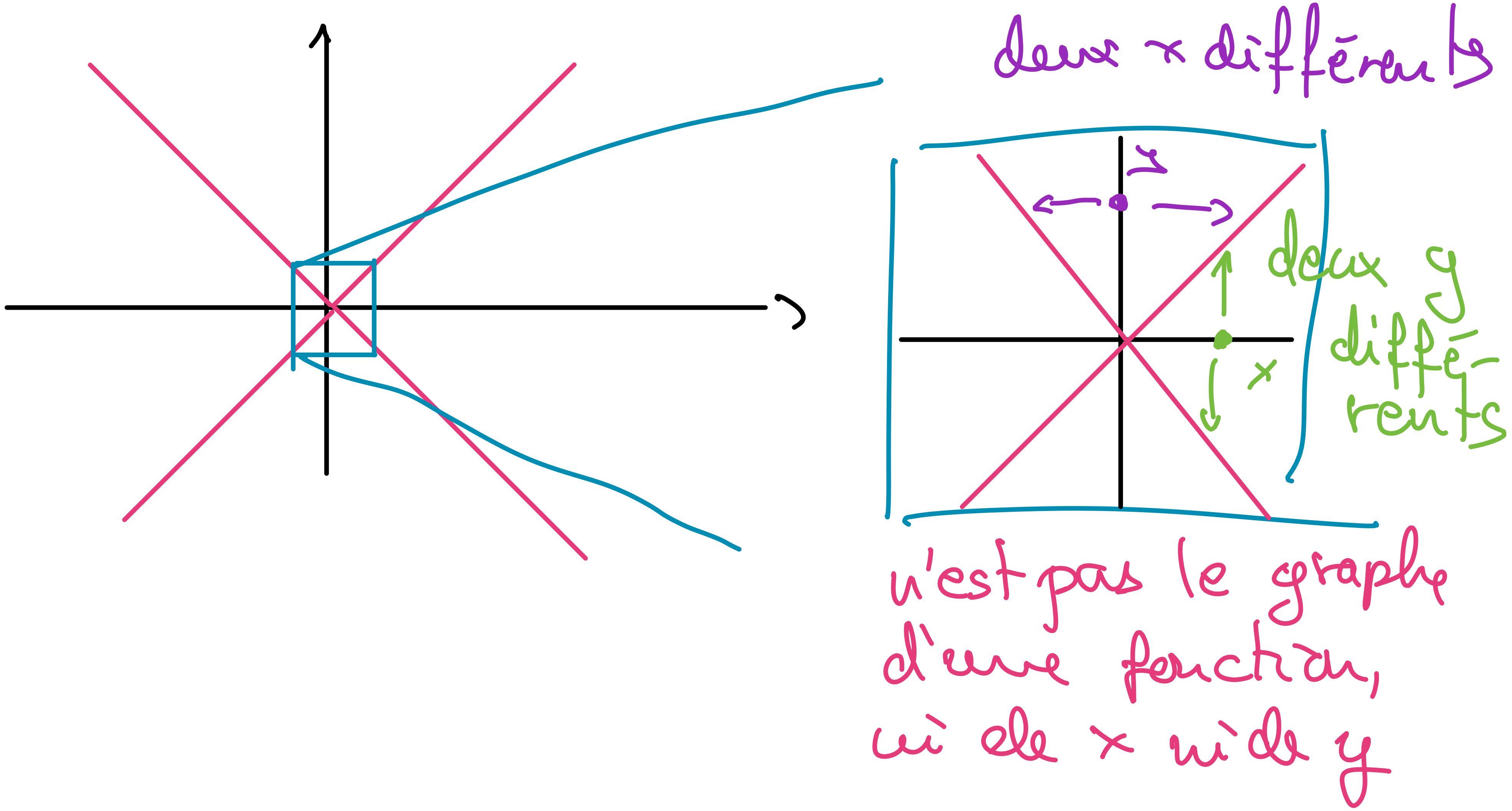
Notre but est de déterminer pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, quand est-ce qu'un ensemble de niveau est un ensemble de dimension $n-1$, ($\mathbb{R}^2 \to$ courbe, $\mathbb{R}^3 \to$ surface) et quand cet ensemble peut se décrire comme le graphe d'une fonction.

Exemple 5.4 : (i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $c = 1$. Alors, $f^{-1}(\{1\}) = \partial B((0,0), 1)$



(ii) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = 0$.

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) : x^2 - y^2 = 0\} = \{(x,y) : |x| = |y|\}$$



Théorème 5.5 (Théorème des fonctions implicites, $n=2$)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert, $(\tilde{x},\tilde{y}) \in D$, $f \in C^1(D)$ et $c = f(\tilde{x},\tilde{y})$.

Alors,

(i) Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) \neq 0$, alors, localement autour de $(\tilde{x},\tilde{y})$,

l'ensemble de niveau c de f est le graphe d'une fonction de x, $\varphi(x)$ de classe C^1 tq.

$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$ et $f(x,\varphi(x)) = c$

Plus précisément, $\exists\, a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tq $a < \tilde{x} < b$, $\alpha < \tilde{y} < \beta$ et $\varphi \in C^1(]a,b[)$ tq

$$f^{-1}(\{c\}) \cap\,]a,b[\times]\alpha,\beta[= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]a,b[\text{ et } y = \varphi(x)\}$$

De plus, on a alors,

$$\varphi'(\tilde{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})}$$

(ii) Si $\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) \neq 0$, alors localement autour de $(\tilde{x},\tilde{y})$,

l'ensemble de niveau c de f est le graphe d'une fonction de y, $\psi(y)$ de classe C^1 tq

$\psi(\tilde{y}) = \tilde{x}$, $\quad f(\psi(y), y) = c$

Plus précisément, $\exists a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $a < \tilde{x} < b$, $\alpha < \tilde{y} < \beta$ et $\psi \in C^1(]\alpha,\beta[)$ tq

$$f^{-1}(\{c\}) \cap]a,b[\times]\alpha,\beta[= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]\alpha,\beta[, \quad x = \psi(y)\}$$

De plus, on a alors, $\psi'(\tilde{y}) = - \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})}$.

Preuve de la formule pour $\varphi'(\tilde{x})$.

On a $c = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in]a,b[$.

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x, \varphi(x))\right] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}[x] + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x)]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)).$$

en $x = \tilde{x}$,
$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \underbrace{\varphi(\tilde{x})}_{\tilde{y}}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \underbrace{\varphi(\tilde{x})}_{\tilde{y}}) \cdot \varphi'(\tilde{x})$$

$$\varphi'(\tilde{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}.$$